УДК 539.3

С.А.НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ И КОНТИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ СТРУКТУРНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

В статті пропонуються методи аналізу чутливості складних скінченноелементних моделей структурно зв'язаних систем. Досліджено обчислювальні етапи одержання градієнтів функціоналів систем до відхилення геометричних параметрів і фізико-механічних характеристик за наявності дії фізичних полів різної природи.

Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically two methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations. Complicated finite-element models sensitivity analysis methods for structurally connected systems are given in this article.

Необходимость комплексного моделирования сложных составных конструкций, создания достоверной цифровой модели прототипов и проведения реалистичных виртуальных испытаний на всех этапах жизненного цикла; внутренняя логика интеграции различных научных дисциплин обуславливают потребность в создании совершенных конечномерных и континуальных моделей структурно связанных систем [1,2]. Анализ чувствительности является промежуточным этапом исследований между расчетом и оптимизацией, позволяя комплексно производить оценку направления и скорости изменения функционалов качества конструкций при изменении варьируемых параметров без модификации всей модели. Анализ чувствительности позволяет решить целый ряд практических задач проектирования, доводки, технологической подготовки производства и контроля эффективной эксплуатации конструкций [3].

Целью проведенных исследований была разработка методик анализа чувствительности конечномерных и континуальных моделей структурно связанных систем. Задача анализа количественных характеристик качества $J = J(u,y)$ структурно связанных систем описывается в общем виде в операторной форме

$$A(y,u,t) = 0, \qquad (1),$$

где A –оператор математической связи между заданными u и искомыми y физическими величинами, структура и параметры которого зависят от типа исследуемого явления, состава системы, граничных условий, нагрузок и условий сопряжения; y – вектор(функция) переменных состояния(перемещения, температуры, потенциалы электрического поля и т.д.), образующих пространство решений; u – вектор(функция) варьируемых и детерминированных параметров(характеристики физико-механических свойств материалов, присоединенных масс, жесткости, управляющих нагрузок, геометрические размеры и т.д.); t – время. Структура любой системы в общем случае включает в себя не только взаимосвязь подструктур и характер их физического взаимодействия, но и отношения самой различной природы (пространственные, временные, отношения доминирования, информационные и т.д.). Моделирование реальных эксплуатационных режимов нагружения f может быть заданным, зависящим от взаимодействия объекта с окружающей средой (газом, жидкостью) или с внешним полем(температурное, электромагнитное), случайным. Когда для исследования оказываются важными внешние связи рассматриваемой системы, то можно перейти к изучению более широкой системы, в которой эти связи становятся внутренними, но и для данной более широкой системы необходимо выполнение условия физической замкнутости.

Возможности классических методов, базирующихся на решении системы уравнений в частных производных краевых задач математической физики (1), весьма ограничены. Краевая задача может быть приведена к вариационной форме при помощи умножения уравнения (1) на произвольный виртуальный z из пространства Z гладких «обобщенных» перемещений, удовлетворяющих краевым условиям, и последующего интегрирования по частям. Вариационные методы приводят к матричной алгебраической проблеме и служат удобной основой для построения теоретически обоснованных расчетных схем[4,5]. Для случая статики задача (1) приводится к вариационному уравнению, справедливому для всех кинематически допустимых z:

$$a_u(y,z) \equiv (\overline{A_u} y, z) = (f, z)\,, \tag{2}$$

или в случае контактного взаимодействия тел с гладкими поверхностями к вариационному неравенству

$$(\overline{A_u} y, z-y) \geq (f, z-y),\ \ \forall z \in G, \tag{3}$$

где $\overline{A}$ – расширение по Фридрихсу оператора краевой задачи; $a_u(y,z)$ – соответствующая положительно определенная и непрерывная билинейная форма, (f,z) – линейная силовая форма, G – множество, задаваемое условиями непроникновения. Вариационные задачи или неравенства приводятся к проблеме минимизации функционалов. Для случая (2) ищется безусловный минимум, а для случая (3) – минимум на множестве G в пространстве функций y.

Были разработаны две методики анализа чувствительности. Первый подход предполагает следующую последовательность вычислительных этапов (на примере задачи статики): 1) конечноэлементная (КЭ) дискретизация задачи анализа (2)

$$A(\vec{u},\vec{y}) = K(\vec{u})\vec{y} - \vec{F}(\vec{u}) = \vec{0}, \tag{4}$$

где $\vec{y},\vec{F}$ – «обобщенные» векторы узловых перемещений и нагрузок; $K(\vec{u})$ – «обобщенная» матрица жесткости системы; $\vec{u}$ – вектор варьируемых параметров системы; 2) введение вектора сопряженных переменных

$K^T(\vec{u})\vec{\psi} = K(\vec{u})\vec{\psi} = \vec{g} = \vec{\nabla}_y J$; 3) введение пространства варьируемых переменных; 4) вычисление градиентов от функционалов качества конструкций

$$\vec{\nabla}_u J = \left\{ -\frac{\partial H^я}{\partial u_i} = -\vec{\psi}^T \left(K'_{u_i} \vec{y} - \vec{F}'_{u_i} \right) + \frac{\partial J}{\partial u_i} \right\}_{i=\overline{1,n}},$$

где гамильтониан $H = \vec{\psi}^T \left(K(\vec{u})\vec{y} - \vec{F}(\vec{u}) \right) - J(\vec{u}, \vec{y})$. Для мультифизичной конечноэлементной модели конструкций сильной (полной) степени связанности (например, пьезоэлектрические устройства акустоэлектроники) уравнение (4) имеет вид

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{F}_2 \end{Bmatrix},$$

где K_{11}, K_{21}, K_{22} –матрицы жесткости; пьезоэлектрической связи; диэлектрической проницаемости, $\vec{y}_1$ и $\vec{y}_2$ – вектора узловых перемещений и потенциалов электрического поля в пьезоэлектрике, $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ – вектора механической и электрической нагрузки.

Во второй методике сопряженные переменные вводятся непосредственно для вариационной или дифференциальной формулировки исходной задачи анализа. После чего редукция исходной и сопряженной задач (переход от непрерывных переменных к дискретным с одновременным избавлением от операций дифференцирования и/или интегрирования), а также варьируемых функций формы механического элемента или конструкции (введение понятия материальной производной) может выполняться как три формально несвязанных этапа. Основные разрешающие уравнения для процессов, изменяющихся во времени, могут быть непосредственно получены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона-Остроградского

$$\delta \int (T - \Pi + W) dt = 0,$$

где T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия(является наиболее важной энергетической характеристикой произвольной системы, выраженной через компоненты выбранного пространства состояний и при необходимости может включать, например, энергию электрической индукции для трехмерного пьезоэлектрического тела), W – работа приложенных сил. Задачи на собственное значение λ (собственные колебания и потеря устойчивости) можно формально представить вариационным уравнением вида

$$a_u(y,z) = \lambda b_u(y,z) \qquad (5)$$

для всех z из пространства Z гладких кинематически допустимых «обобщенных» перемещений. Поскольку уравнение (5) однородно по y, необходимо добавить условие нормировки $b_u(y,y) = 1$ для определения собственной функции единственным образом. Варьируя по u обе части уравнения (5), учитывая свойства симметрии $a_u(y,z)$ и $b_u(y,z)$; $z = y$; отбрасывая члены, равные 0; получим формулу для вычисления производной некратного собственного значения

$$\lambda' = a'_u(y,y) - \lambda\, b'_u(y,y).$$

Преимуществом второй методики является то,. что используются поля «обобщенных» перемещений, а не узловые параметры, определяемые матричными уравнениями.

На рис. 1 и 2 с целью демонстрации предлагаемых подходов приведены примеры решенных задач. В качестве формы иллюстрации результатов сделана тоновая заливка на поверхности конструкций. Светлыми тонами показана зона близких к нулю коэффициентов чувствительности, темными – экстремальных.

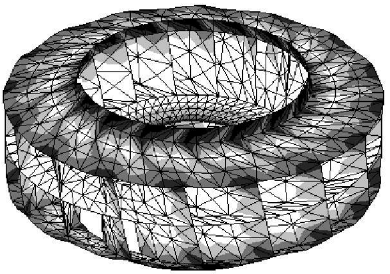

Рисунок 1 – Анализ чувствительности 3-ей собственной частоты колеса тягодутьевой машины ДН-26х2 к изменению приведенного модуля упругости (жесткостным характеристикам). Использовались оболочечные КЭ

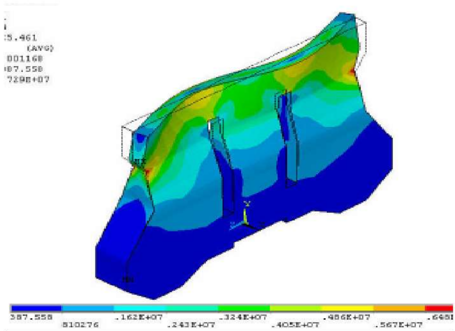

Рисунок 2 – Анализ чувствительности 4-ой собственной частоты ультразвукового сварочного сонотрода к добавлению материала (нормальным перемещениям точек поверхности). При исследованиях использовались трехмерные КЭ

Доработан метод анализа чувствительности конечномерных моделей в части учета воздействия физических полей различной природы и распространен на новый класс структурно связанных систем. Разработан метод анализа чувствительности континуальных моделей структурно связанных систем, который отличается тем, что для производных получаются явные выражения в терминах физических величин, а не в терминах сумм производных от матриц конечных элементов систем. Конечномерный и континуальный подходы связаны между собой(первый является аппроксимацией второго).

Список литературы: **1.** *Автономова Л.В., Лавинский В.И. Бондарь С.В.* Узагальнена математична модель структурно зв'язаних систем // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2003. – Вип. 12., т. 1. – С. 160-164. **2.** *Xu B. and Jiang J. S.*. Integrated optimization of structure and control for piezoelectric intelligent trusses with uncertain placement of actuators and sensors // Computational Mechanics. – 2004. – Vol. 33, Number 5. – P. 406-412. **3**. *Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин, А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б.* Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – № 8, т. 3. – С. 77-82. **4.** *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.. **5.** *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Поступила в редколлегию 04.06.2007

УДК.621.757.083

И.Л.ОБОРСКИЙ, канд.техн.наук, Киевский национальный университет технологий и дизайна; ***А.П.ЗВОНАРЕВА, А.В.ЩЕПКИН,*** НТУ «ХПИ»; ***В.И.ДУДИНСКИЙ,*** Киевский национальный университет технологий и дизайна

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СБОРКИ СОЕДИНЕНИЙ С НАТЯГОМ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ С ТЕРМОВОЗДЕЙСТВИЕМ

На основі порівняльних даних аналітичних і експериментальних досліджень визначено величину збільшення діаметра посадки бандажа складеного колеса електровагона при його нагріванні.

By means of the comparative data of the analytical and experimental researches, the value of increase of the fit diameter of electrocar built-up wheel bandage at its heating is determined.

Постановка проблемы

Одной из наиболее актуальных для технологии машиностроения проблем является создание соединений с натягом с повышенными эксплуатационными показателями, которые могут быть в целом ряде случаев получены путем использования сборки с термовоздействием, при которой обеспечивается соединение деталей с временно образованным зазором. Решение проблемы неразрывно связано с установлением номенклатуры нормативных сборочных параметров, оценкой их величин и совершенствованием при этом технологических процессов сборки в целом. Это требует создания нормативной базы выбора множества взаимосвязанных технологических и конструктивных параметров, использование которой позволит производственникам при минимальных затратах получать соединения с натягом.

Анализ предыдущих исследований

В работах [1-2] установлены взаимодействующие во времени и пространстве связи и физические закономерности протекания операций технологического процесса сборки соединений с натягом, осуществляемых с использованием нагрева и низкотемпературного охлаждения. Разработаны некоторые направления повышения их качества и автоматизации процесса, выпол-